

# CHAPITRE 0 : MESURE ET INCERTITUDES

## 1 Erreurs de mesures

Lorsqu'on réalise la mesure d'une grandeur notée  $G$  (par exemple : l'intensité notée  $I$ , la masse notée  $m$ , ...), la valeur de la mesure n'est jamais parfaite. En effet, il existe toujours des erreurs de mesures. Ces erreurs sont dues à la méthode de mesure, aux instruments, aux personnes, à l'environnement, et à l'objet mesuré lui même.

**Exemple :** On réalise le titrage d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution d'hydroxyde de sodium.

Dans ce cas, on utilise une burette et la détermination du volume équivalent est liée à plusieurs sources d'erreurs. Ces sources d'erreurs peuvent être liées à :

- l'expérimentateur (lecture du volume à l'équivalence)
- l'instrument (incertitude donnée par le fabricant, ici burette de classe A donc incertitude sur le volume de  $\pm 0,05$  mL)
- l'environnement (influence de la température, ici la burette a été étalonnée pour une température de  $20$  °C)
- la méthode de mesure (incertitude sur la lecture du point à l'équivalence lors de l'emploi d'un indicateur coloré)



## 2 Dispersion des mesures

Quand on réalise plusieurs fois la même mesure d'une grandeur dans les mêmes conditions, on obtient des valeurs souvent différentes. C'est la dispersion des mesures.

Pour l'ensemble des valeurs mesurées, on calcule la valeur moyenne de cette série de mesures. La valeur moyenne sera alors la valeur donnée à cette grandeur.

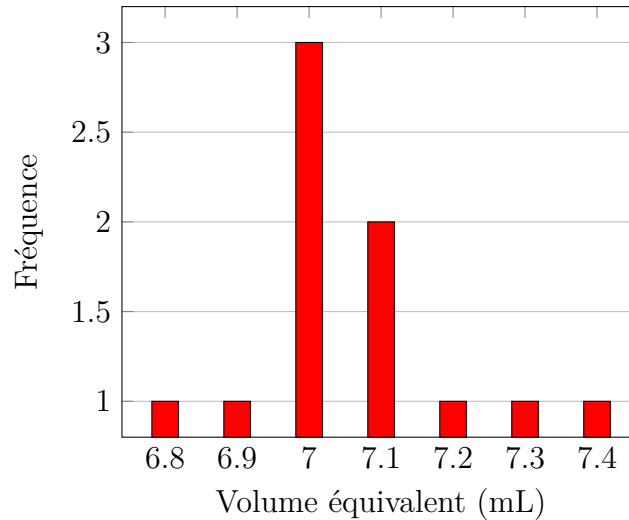
La dispersion est caractérisée par l'écart-type  $\sigma_{n-1}$ . (L'écart-type peut être calculé avec une calculatrice ou un tableur). Plus il est faible, plus les valeurs sont resserrées autour de la valeur moyenne. On peut visualiser cette dispersion des valeurs à l'aide d'un histogramme.

**Exemple :** Valeurs du volume équivalent lors d'un titrage acide-base.

Les résultats obtenus lors de ce titrage acide base réalisé plusieurs fois sont les suivants :  
7,0 mL, 7,3 mL, 7,0 mL, 6,9 mL, 7,1 mL, 7,1 mL, 7,4 mL, 7,0 mL, 7,2 mL, 6,8 mL

Le tableau ci-dessous donne la fréquence des différentes valeurs du volume équivalent :

Volume équivalent (mL)	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4
Fréquence	1	1	3	2	1	1	1



## 3 Incertitude

### 3.1 Définition

L'incertitude de mesure est un paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs autour d'une valeur "moyenne" de la mesure. Elle reflète l'impossibilité de connaître exactement la valeur vraie de la mesure. On la note  $u(G)$  et a la même unité que la grandeur mesurée.

### 3.2 Notion d'incertitude-type

L'incertitude-type est utilisé pour définir l'incertitude associée à une grandeur dont on a réalisé une mesure directe. Elle s'exprime en fonction de l'écart-type noté  $\sigma_{n-1}$ . On distingue deux types d'incertitude-type :

- de type A
- de type B

#### 3.2.1 Incertitude-type sur une série de mesures (Incertitude-type de type A)

L'incertitude-type sur une série de mesure est dite de type A. Elle est associée à une incertitude de répétabilité lorsque la mesure est réalisée plusieurs fois dans les mêmes conditions. Cette incertitude-type  $u(G)$  est donnée par la relation :

$$u(G) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ avec } \sigma_{n-1} \text{ l'écart-type et } n \text{ le nombre de mesures réalisées}$$

**Exemple :** Valeurs du volume équivalent lors d'un titrage acide-base.

Les résultats obtenus lors de ce titrage acide base réalisé plusieurs fois sont les suivants :

7,0 mL, 7,3 mL, 7,0 mL, 6,9 mL, 7,1 mL, 7,1 mL, 7,4 mL, 7,0 mL, 7,2 mL, 6,8 mL

La valeur de l'écart-type pour ces 10 valeurs est :  $\sigma_{n-1} = 0,1814$  mL

La valeur de l'incertitude-type  $u(V)$  est de :

$$u(V) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,1814}{\sqrt{10}} = 0,0574 \text{ mL}$$

Pour les valeurs des incertitudes-types, on donne un arrondi par excès avec un seul chiffre significatif. Donc  $u(V) = 0,06$  mL

### 3.2.2 Incertitude-type sur une mesure unique (Incertitude de type B)

L'incertitude type sur une mesure unique est dite de type B. Elle est associée à l'erreur systématique lors d'une mesure unique. L'incertitude-type est aussi déterminée à partir du calcul d'un écart-type mais celui-ci n'est pas calculé sur une série de valeurs, mais il est estimé à partir d'informations. (Classe des instruments, documentation constructeur, ...)

Cette catégorie d'incertitude-type se rencontre dans les exemples suivants :

— Lecture sur une échelle graduée (thermomètre, éprouvette, règle ... ) :

$$u_{lecture} = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$$

— Double lecture sur une échelle graduée (pipette graduée, règle ... ) :

$$u_{double \text{ lecture}} = \sqrt{2} \times \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}}$$

— Indication de la tolérance sur l'appareil ou sur la notice :

$$u_{tolérance} = \frac{tolérance}{\sqrt{3}}$$

**Exemple :** Utilisation de la burette lors d'un titrage acide-base.

— L'incertitude-type sur la lecture du volume équivalent est de :

$$u_{lecture} = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}} = \frac{0,1}{\sqrt{12}} = 0,0289 \text{ mL}$$

Pour les valeurs des incertitudes-types, on donne un arrondi par excès avec un seul chiffre significatif. Donc  $u_{lecture} = 0,03$  mL

— L'incertitude-type sur l'indication donnée sur la burette (tolérance :  $\pm 0,05$  mL) :

$$u_{tolérance} = \frac{tolérance}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,0289 \text{ mL}$$

Pour les valeurs des incertitudes-types, on donne un arrondi par excès avec un seul chiffre significatif. Donc  $u_{tolérance} = 0,03$  mL

## 4 Incertitude-type élargie et niveau de confiance

L'incertitude élargie, notée  $U(G)$ , est définie par la relation :

$$U(G) = k \times u$$

avec  $k$  le facteur d'élargissement et  $u(G)$ , l'incertitude-type

Le facteur d'élargissement  $k$  dépend du nombre de mesures et du niveau de confiance choisi. Pour un grand nombre de mesure (en général supérieur à 20), on a :

- $k = 1$  pour un niveau de confiance de 68 %
- $k = 2$  pour un niveau de confiance de 95 %
- $k = 3$  pour un niveau de confiance de 99 %

**Remarque :** Dans le cas d'un petit nombre de valeurs ( $N < 20$ ), la valeur de  $k$  (aussi appelée coefficient de Student) est donnée dans des tables en fonction du niveau d'élargissement.

Ci-dessous les valeurs de  $k$  en fonction du nombre de mesures pour un niveau de confiance de 95 %

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_{95\%}$	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,16	2,13	2,09

## 5 Incertitude-type composée

### 5.1 Incertitude de type A et B

Dans le cas où l'on a réalisé une série de mesures (incertitude de type A  $u_A$ ) et que chacune d'entre elles est affectée d'une incertitude de type B  $u_B$ , l'expression de l'incertitude-type composée  $u(G)$  est :

$$u(G) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

### 5.2 A partir d'une relation avec d'autres grandeurs

On considère une grandeur  $G$  qui s'exprime en fonction d'autres grandeurs  $G_1, G_2, \dots$  et pour lesquelles les incertitudes-types  $u_{G1}, u_{G2}, \dots$  sont connues. Dans le cas où la grandeur  $G$  a pour expression :  $G = G_1 \times G_2$  ou  $G = G_1/G_2$  alors l'incertitude-type  $u(G)$  a pour expression :

$$u(G) = g \times \sqrt{\left(\frac{u_{G1}}{g_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{G2}}{g_2}\right)^2}$$

## 6 Expression du résultat

L'expression du résultat d'une mesure consiste à indiquer la valeur de la grandeur mesurée (valeur moyenne lorsque la mesure est répétée ou valeur mesurée lorsque la mesure est unique) avec son unité, mais aussi à préciser l'incertitude-type de la mesure pour informer sur sa précision.

Si on considère une grandeur  $G$  dont on a réalisé la mesure  $g$  et déterminé l'incertitude-type  $u(G)$  (donc l'incertitude-type élargie  $U(G)$  si l'on connaît le niveau de confiance) alors, le résultat de la grandeur  $G$  peut s'écrire :

- Présentation du résultat à l'aide d'une égalité :

$$G = g \pm U(G) \text{ unité}$$

- Présentation du résultat à l'aide d'un intervalle de confiance :

$$[g - U(G); g + U(G)] \text{ unité}$$

- Présentation du résultat à l'aide d'un encadrement :

$$g - U(G) \text{ unité} \leq G \leq g + U(G) \text{ unité}$$

**Exemple :** Valeurs du volume équivalent lors d'un titrage acide-base.

Les résultats obtenus lors de ce titrage acide base réalisé plusieurs fois sont les suivants :  
7,0 mL, 7,3 mL, 7,0 mL, 6,9 mL, 7,1 mL, 7,1 mL, 7,4 mL, 7,0 mL, 7,2 mL, 6,8 mL

La valeur de l'écart-type pour ces 10 valeurs est :  $\sigma_{n-1} = 0,1814 \text{ mL}$

La valeur de l'incertitude-type  $u(V)$  est de :

$$u(V) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,1814}{\sqrt{10}} = 0,0574 \text{ mL}$$

Pour les valeurs des incertitudes-types, on donne un arrondi par excès avec un seul chiffre significatif. Donc  $u(V) = 0,06 \text{ mL}$ .

La valeur moyenne est de 7,08 mL

Le résultat peut alors s'exprimer de trois façons différentes (pour un intervalle de confiance de 68 %) :

- $V = 7,08 \pm 0,06 \text{ mL}$
- $[7,02 ; 7,14] \text{ mL}$
- $7,02 \text{ mL} \leq V \leq 7,14 \text{ mL}$

Par convention, l'incertitude-type  $u(g)$  est arrondie à la valeur supérieure avec au plus deux chiffres significatifs (un seul en général). Le dernier chiffre significatif conservé pour la valeur mesurée  $g$  est identique à celui de l'incertitude  $u(g)$ .

## 7 Valeur de référence et validité du résultat

Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue (vitesse du son dans l'air, température de changement d'état d'un corps pur, ...). Cette valeur est appelée valeur de référence et est notée  $g_{ref}$ . On peut alors comparer la valeur mesurée à la valeur de référence afin de valider un résultat. Pour cela, on peut calculer les quotients suivants :

- Quotient d'évaluation de la qualité de la mesure :

$$\frac{|g - g_{ref}|}{U(G)}$$

Si le résultat de ce quotient est inférieur ou égal à un alors la valeur de la mesure est en accord avec la valeur de référence.

- Quotient de l'incertitude type par rapport à la mesure (incertitude relative) :

$$\frac{U(G)}{g} \times 100$$

Si l'incertitude relative est inférieure à 10 %, la mesure est de bonne qualité.

- Quotient de l'écart entre la mesure et la valeur de référence par rapport à la valeur de référence (écart relatif) :

$$\frac{|g - g_{ref}|}{g_{ref}} \times 100$$

Si la valeur de l'écart relatif est inférieur à 5 %, la mesure est de bonne qualité.

## 8 Justesse et fidélité

Une erreur possède généralement deux composantes :

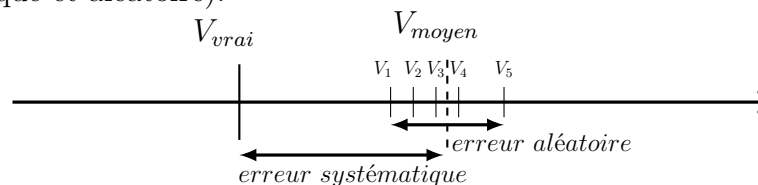
- L'erreur aléatoire : elle varie pour chaque mesure et met en évidence la dispersion des mesures. Elle est mise en évidence en répétant les mesures avec le même protocole. Elle est liée à la non reproductibilité parfaite de l'expérience (du à l'opérateur ou à la variation des grandeurs). Si l'erreur aléatoire est faible, le protocole de mesure est dit "juste".
- L'erreur systématique : elle est identique pour toutes les mesures. Elle peut provenir d'un appareil mal étalonné, mal utilisé ou défectueux. Si l'erreur systématique est faible, le protocole de mesure est dit "fidèle".

**Exemple :** Valeurs du volume équivalent lors d'un titrage acide-base.

Les résultats obtenus lors de ce titrage acide base réalisé plusieurs fois sont les suivants :

$V_1 = 7,2$  mL,  $V_2 = 7,3$  mL,  $V_3 = 7,4$  m,  $V_4 = 7,5$  mL,  $V_5 = 7,7$  mL.

On connaît également la valeur vraie du volume équivalent qui est de 7,0 mL. On peut représenter l'ensemble de ces valeurs sur un axe et ainsi visualiser les deux composantes de l'erreur (systématique et aléatoire).



Dans cette exemple, on peut dire qu'il y a :

- une erreur systématique : le protocole n'est pas fidèle
- une erreur aléatoire : on peut observer une dispersion des valeurs (si l'erreur aléatoire est faible, le protocole est juste).

## 9 Amélioration de la qualité d'une mesure

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1 %, il faut chercher comment améliorer la qualité de la mesure effectuée :

- le matériel choisi doit présenter une tolérance suffisamment faible
- le nombre de mesures indépendantes doit être suffisant
- pour réduire l'erreur aléatoire, il faut reproduire la mesure afin de réduire l'influence des fluctuations à l'aide d'une moyenne
- pour réduire l'erreur systématique, il faut vérifier chaque étape de la mesure pour éliminer la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie.